

# ESTABILIDADE E CONTROLE NÃO-LINEARES DE SISTEMAS MECÂNICOS SIMPLES: O DUPLO PÊNDULO HORIZONTAL E UM PAR DE PÊNDULOS LIGADOS A UMA BARRA OSCILANTE. Gabriel Gouvêa Slade, Prof. Dr. José Roberto Ruggiero. – Física – Física Biológica – Departamento de Física – Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas – Campus de São José do Rio Preto.

O problema de controle e estabilidade de sistemas mecânicos é de grande interesse em muitos problemas de engenharia. Por exemplo, no desenvolvimento de estratégias de emergência para defeitos em aviões, helicópteros, espaçonaves, juntas flexíveis e na articulação de braços de robôs, entre outros.

O objetivo deste trabalho é estudar alguns procedimentos básicos para obter a estabilidade e o controle de sistemas mecânicos simples. O estudo está baseado em duas importantes ferramentas matemáticas: o teorema da estabilidade de Lyapunov e o princípio de invariância de La Salle. Usando estes dois conceitos desenvolvem-se funções de controle para os sistemas satisfazendo características apropriadas para os mesmos.

A determinação analítica da função controladora e os resultados da integração numérica das equações de movimento usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem serão apresentadas e discutidas para dois sistemas simples: o duplo pêndulo horizontal [1] e um par de pêndulos ligados a uma barra que oscila com movimento amortecido [2].

**O pêndulo duplo horizontal:** O primeiro sistema é composto por duas hastes de massas  $m_1$  e  $m_2$  e comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ , respectivamente. A extremidade de uma das hastes pode oscilar em torno de um eixo vertical na origem e a outra extremidade está articulada, por um eixo também vertical, com a extremidade da outra barra. Uma mola de constante elástica  $k$  liga a primeira haste ao eixo principal de rotação. A introdução da mola tem como propósito mimetizar o papel do campo gravitacional e tornar o problema equivalente ao pêndulo duplo.

O ponto de equilíbrio deste sistema é  $(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0, 0, 0)$ , sendo  $\theta_i$  os deslocamentos angulares (positivos no sentido anti-horário) de cada haste em relação à horizontal e  $\dot{\theta}_i$  as respectivas velocidades angulares. O objetivo é aplicar um torque controlador na segunda haste do sistema de modo a fazer o pêndulo duplo tender à posição de equilíbrio. As equações de movimento para o sistema são:

$$(K_1 + K_2 + 2K_3 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (K_2 + K_3 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_2 - K_3 \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 + k\theta_1 = 0, \quad (1)$$

$$(K_2 + K_3 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + K_2 \ddot{\theta}_2 + K_3 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 = \tau, \quad (2)$$

onde  $\tau$  é o torque e  $K_1 = I_1 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2$ ,  $K_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2$  e  $K_3 = m_2 l_1 l_{c2}$ , com  $I_1, I_2$  os momentos de inércia das hastes 1 e 2 em relação aos, respectivos, eixos de rotação e  $l_{c1}, l_{c2}$  as posições, ao longo da haste, dos centros de massa de cada haste, são constantes características do sistema

Uma candidata à função de Lyapunov pode ser obtida somando à energia total do sistema dois termos proporcionais à energia cinética e energia potencial da segunda haste, ou seja,

$$V = \frac{1}{2} K_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + K_3 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + \frac{1}{2} k \theta_1^2 + \frac{1}{2} \beta \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \gamma \theta_2^2 \quad (3)$$

Usando as eq. (1) e (2), pode-se mostrar que a derivada temporal de  $V$  pode ser escrita como

$$\dot{V} = \dot{\theta}_2 (\tau + \beta \ddot{\theta}_2 + \gamma \theta_2) \quad (4)$$

Para o sistema respeitar o princípio de La Salle e convergir para a condição de equilíbrio desejada,  $\dot{V}$  deve ser menor ou igual à zero. Assim, podemos determinar  $\tau$  de forma que:

$$\tau + \beta \ddot{\theta}_2 + \gamma \theta_2 = -\dot{\theta}_2 \quad (5)$$

Desse modo o sistema convergirá para uma situação na qual  $\dot{\theta}_2 = 0$  e, como consequência,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

Um cálculo tedioso, ainda que elementar, permite obter  $\ddot{\theta}_2$  das eq. (1) e (2) e, substituindo em (5) encontrar uma expressão analítica para o torque controlador:

$$\tau = \frac{-(K_1 K_2 - K_3^2 \cos^2 \theta_2)(\dot{\theta}_2 + \gamma \theta_2) - \beta F(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)}{K_1 K_2 - K_3^2 \cos^2 \theta_2 + \beta(K_1 + K_2 + 2K_3 \cos \theta_2)}, \quad (6)$$

onde,

$$F(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (-K_2 - K_3 \cos \theta_2)(K_3 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) - k\theta_1) + (K_1 + K_2 + 2K_3 \cos \theta_2)(-K_3 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1) \quad (7)$$

A verificação da validade do controlador foi feita através da integração numérica das equações de movimento. Dois exemplos do tipo de resultados obtidos estão representados abaixo:

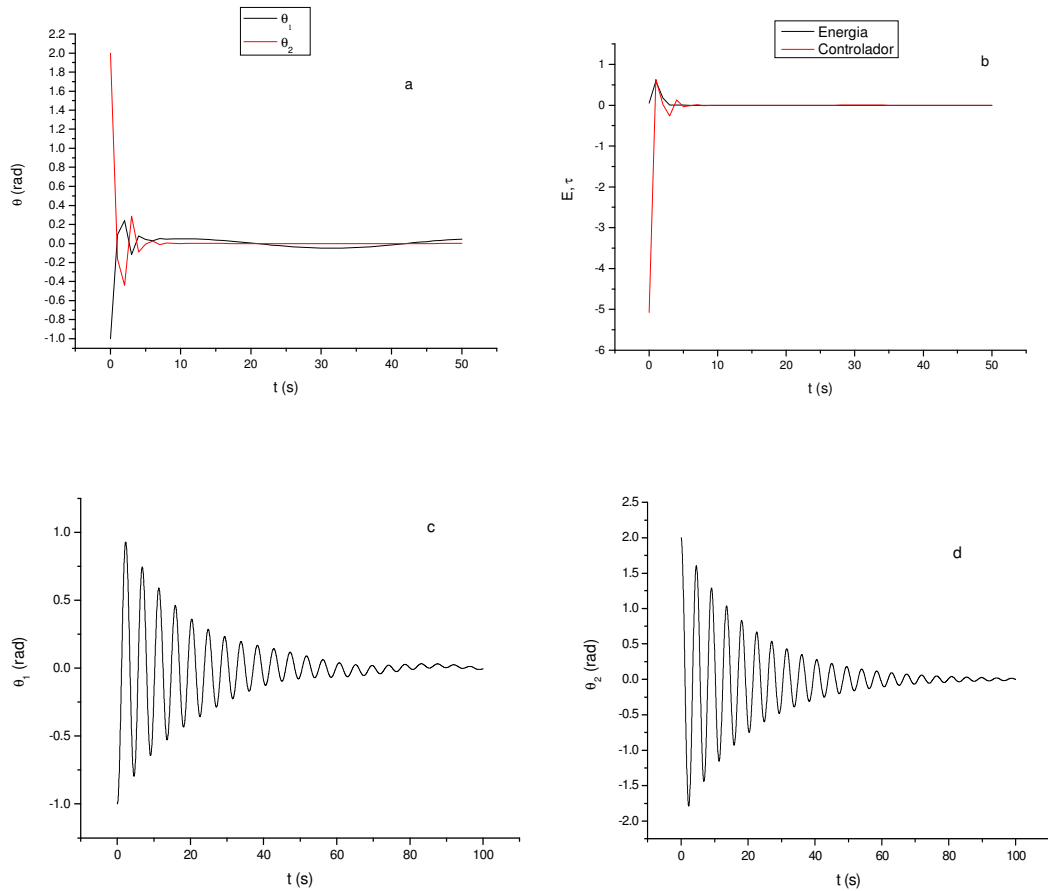


Figura 1 – (a) Trajetória das hastes 1 e 2 versus tempo. (b) Trajetória da Energia e do controlador versus tempo. Condições iniciais:  $\theta_1 = -1.0$ ,  $\theta_2 = 2.0$  e  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ . Parâmetros:  $\beta = 0.5$  e  $\gamma = 4.0$ . (c) Trajetória da haste 1 versus tempo. (d) Trajetória da haste 2 versus tempo. Condições iniciais:  $\theta_1 = -1.0$ ,  $\theta_2 = 2.0$  e  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ . Parâmetros:  $\beta = 10$  e  $\gamma = 20$ .

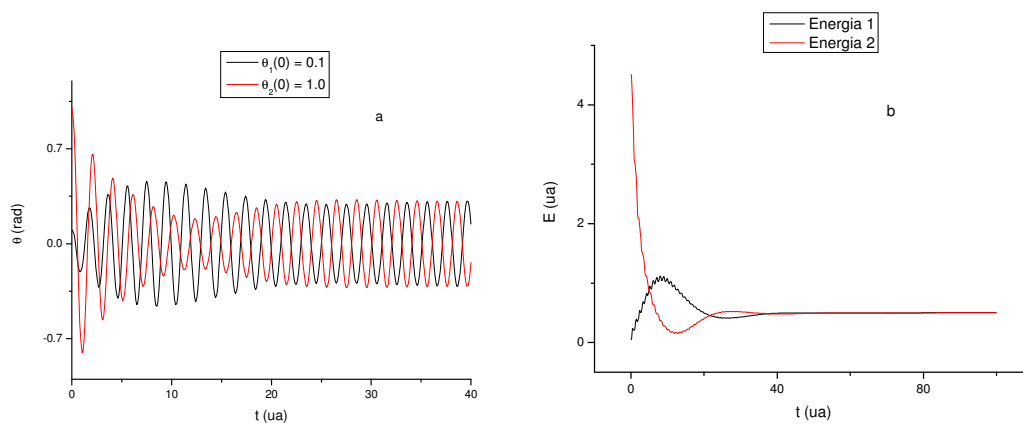
Nota-se, claramente, que os sistemas tendem para a posição de equilíbrio  $(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2) = (0, 0, 0, 0)$ . Apesar da variação nos parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$ , o controlador continuou exercendo sua função, porém utilizando um tempo maior. Outros testes foram realizados e obtivemos êxito em todos eles. Desse modo, podemos concluir que a função controladora utilizada atua da forma esperada para a estabilização do pêndulo duplo horizontal.

**Dois pêndulos acoplados por uma barra oscilante:** O segundo sistema estudado é constituído por um par de pêndulos idênticos (comprimento  $l$  e massa  $m$ ), com os eixos de oscilação apoiados em uma plataforma (massa  $M$ ) que pode oscilar na direção horizontal em relação à parede à qual está ligada por uma mola de constante elástica  $k$ . O movimento oscilatório da barra é amortecido com uma força proporcional à velocidade da mesma e com coeficiente de amortecimento  $d$ .

Nesse caso, o processo de estabilização é devido ao movimento oscilatório da barra e seu amortecimento, ou seja, o movimento tenderá à situação de equilíbrio estável, com os pêndulos em oposição de fase, mesmo sem a função controladora. Porém, a introdução da função controladora permite que esse objetivo seja obtido num intervalo de tempo relativamente curto e com controle sobre a energia do sistema.

O procedimento utilizado para esse fim baseia-se também na estabilidade de Lyapunov e no princípio de La Salle, porém tratamos agora de um controle ativo que atua sobre a energia do sistema. A função de Lyapunov deve conter um termo do tipo  $\gamma(H - H_*)^2$ , onde  $H$  é a energia dos pêndulos,  $H_*$  é a energia final desejada para cada pêndulo e  $\gamma$  é um fator de ganho (constante), e termos proporcionais à energia cinética. Desse modo, com procedimento semelhante ao do problema anterior, pode-se obter expressões analíticas para as funções controladoras, uma para cada pêndulo, nesse caso [2].

Numericamente integramos as equações de movimento para comprovar os resultados encontrados analiticamente. Exemplos dos resultados obtidos estão apresentados nos gráficos a seguir, nos quais usamos os mesmos conjuntos de condições iniciais e variamos o valor desejado para as energias finais de cada pêndulo,  $H_*$ .



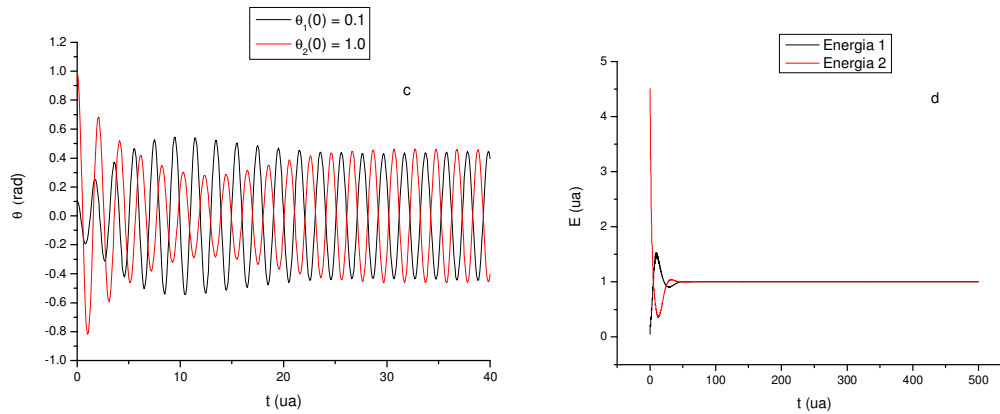


Figura 2 – (a) Trajetória de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  versus tempo e (b) trajetória das energias versus tempo para  $H^* = 0.5$ . (c) Trajetória de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  versus tempo e (d) trajetória das energias versus tempo para  $H^* = 1.0$ . Parâmetros:  $k = 1.0$ ,  $d = 20$ ,  $\gamma = 0.045$ ,  $\lambda_1 = 20$ ,  $\lambda_2 = 4.905$

Como podemos observar das figuras 2a e 2c, a sincronização do par de pêndulos está fora de fase como desejado. Além disso, o controlador exerceu seu papel conduzindo a energia de cada um dos pêndulos para o valor desejado  $H^*$  (figura 2b e 2d). Nota-se também que o controlador é capaz de conduzir o sistema para duas diferentes energias a partir das mesmas condições iniciais mostrando assim sua eficiência.

Por meio destes exemplos mostramos que é possível o controle e a estabilização de sistemas mecânicos simples. Usamos ferramentas matemáticas como o teorema de Lyapunov e o princípio de La Salle, a fim de compreender a parte analítica do problema e utilizamos métodos computacionais para comprovar numericamente os resultados esperados.

### Referências Bibliográficas

- [1] Popescu, C. “Nonlinear Control of Underactuated Horizontal Double Pendulum”. Florida, USA: 2002, 122p. Máster of Science Thesis – Florida Atlantic University, Florida.
- [2] Pogromsky, A.Yu; Belyakh, V.N; Nijmeijer, H. “Controlled synchronization of pendula”. In: Proc. of the IV IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA (2003).

**Bolsa:** Reitoria - PIBIC